Varianta 025

Subiectul I

a) $a=5$. b) $x=1$. c) $\sqrt{2}$. d) $|z|=2$. e) $\sin(\hat{A})=\frac{1}{4}$.

f) $A_{\Delta ABC}=2$.

Subiectul II

1. a) $\hat{5}$. b) $\frac{3}{2}$. c) $\frac{3}{2}$. d) 25. e) $\frac{3}{8}$.

2. a) 1. b) $y=x-1$. c) 0. d) 0. e) $\frac{1}{2}$.

Subiectul III

a) Calcul direct. b) Calcul direct. c) $\det A_{2007}=2007^4+1\neq 0 \Rightarrow \text{rang } A_{2007}=2$.

d) Se tine cont de punctul b) si de faptul ca $A_n\in G, \forall n\geq 1$.

e) $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

f) $A_{n+1}=\begin{pmatrix}x_{n+1} & y_{n+1}\\ -y_{n+1} & x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(n+1)^2 & 1\\ -1 & (n+1)^2\end{pmatrix}$ de unde rezultă concluzia.

g) Scriem A_k sub forma $\mathrm{A_k}=\sqrt{k^4+1}\begin{pmatrix}\cos \mathrm{t_k} & \sin \mathrm{t_k}\\ -\sin \mathrm{t_k} & \cos \mathrm{t_k}\end{pmatrix}$, cu $\mathrm{t_k}=\mathrm{arctg}\frac{1}{k^2}$, $\mathrm{k}\geq 1$ si avem

$\mathrm{x_n}=a_n\cdot\cos(t_1+t_2+...+t_n)$, $\mathrm{y_n}=a_n\cdot\sin(t_1+t_2+...+t_n)$ unde $\mathrm{a_n}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k^4+1}>0$

Avem $0<t_1+t_2+...+t_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{arctg}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=1}^{n}\mathrm{arctg}\frac{k-(k-1)}{k(k-1)+1}=\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{arctg}k-\mathrm{arctg}(k-1))=$

$=\mathrm{arctg}\ \mathrm{n}<\frac{\pi}{2}$. Rezulta $x_n>0, y_n>0$.

g) _Soluția a II-a:_ Demonstrăm propoziția $P(n)$: $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $x_n\geq\frac{y_n}{n}>0$.

Pentru $n=1$, din punctul **e)** rezultă că $P(1)$ este evident adevărată.

Fie $k\in\mathbf{N}^*$. Presupunem că $x_k\geq\frac{y_k}{k}>0$ şi demonstrăm că $x_{k+1}\geq\frac{y_{k+1}}{k+1}>0$.

Din punctul **f)** şi din ipoteza de inducție rezultă: $y_{k+1}=(k+1)^2y_k+x_k>0$ (1)

$x_{k+1}\geq\frac{y_{k+1}}{k+1}\overset{\mathrm{f)}}{\Leftrightarrow}(k+1)^2x_k-y_k\geq(k+1)y_k+\frac{1}{k+1}\cdot x_k\Leftrightarrow\frac{k^3+3k^2+3k}{k+1}x_k\geq(k+2)y_k$

$\Leftrightarrow x_k\geq\frac{k^2+3k+2}{k^3+3k^2+3k}\cdot y_k$ (2)

Din ipoteza de inducție, avem $x_k\geq\frac{y_k}{k}$.

Demonstrăm că $\frac{y_k}{k} \ge \frac{k^2+3k+2}{k^3+3k^2+3k} \cdot y_k \overset{y_k>0}{\Leftrightarrow} k^3+3k^2+3k \ge k \cdot \left(k^2+3k+2\right)$, adevărat.

Aşadar, avem $x_k \ge \frac{y_k}{k} \ge \frac{k^2+3k+2}{k^3+3k^2+3k} \cdot y_k$, deci relația (2) este adevărată.

Obținem că $x_{k+1} \ge \frac{y_{k+1}}{k+1} \overset{(1)}{>} 0$ şi din principiul întâi de inducție rezultă concluzia.

Subiectul IV

a) Avem $1+a+...+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, fiind suma termenilor unei progresii geometrice.

b) Înlocuim pe a cu $-x^p$ în egalitatea de la punctul a).

c) Evident.

d) Integrăm inegalitatea de la punctul c) pe intervalul [0,1] şi aplicăm criteriul cleştelui.

e) Integrăm pe intervalul [0,1] egalitatea de la punctual b) şi obținem

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = a_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p}dx$. Aplicând acum punctul d) rezultă concluzia cerută.

f) Luăm $p=2$ şi pe baza lui e) avem $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

g) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .Pentru p=1 se integrează inegalitatea de la punctul b) pe intervalul [0,1] şi se tine seama de punctul f) rezultând

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - ... + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

.